

# Das Volumen der Kugel

MATHEMATIK • KÖRPER • HANDOUT UND ÜBUNG

Warum füllt eine Kugel genau zwei Drittel des passenden Zylinders? Archimedes hat es gezeigt.

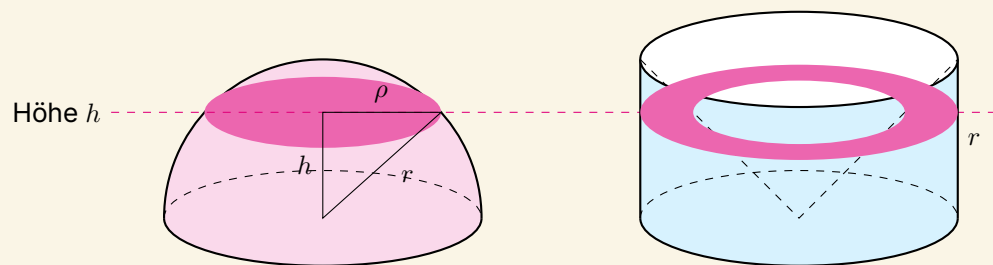
## 1 DAS PRINZIP VON CAVALIERI

### GLEICHE SCHNITTE -- GLEICHES VOLUMEN

Schneidet man zwei Körper in **jeder Höhe** waagrecht durch und sind die Schnittflächen immer **gleich groß**, dann haben die Körper **dasselbe Volumen**. (Bonaventura Cavalieri, 1635. Archimedes benutzte schon viel früher eine Form dieser Idee.)

Beispiel: ein gerader und ein schiefer Stapel aus gleichen Münzen.

## 2 HALBKUGEL UND ZYLINDER OHNE KEGEL



### DIE SCHNITTE IN DER HÖHE $h$

**Links (Kreis):** Radius  $\rho$  mit  $\rho^2 = r^2 - h^2$  (Pythagoras). Fläche:  $\pi \cdot (r^2 - h^2)$ .

**Rechts (Ring):** großer Kreis minus Loch:  $\pi \cdot r^2 - \pi \cdot h^2$  (der Kegel ist in der Höhe  $h$  genau  $h$  breit).

Beide gleich groß, in jeder Höhe! Also: **gleiches Volumen.**

$$V_{\text{Halbkugel}} = \pi \cdot r^2 \cdot r - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot r = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \quad \textbf{Kugel: } V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

 **TIPP** Archimedes (um 287–212 v. Chr., Syrakus) schrieb das Buch „Über Kugel und Zylinder“: Die Kugel hat  $\frac{2}{3}$  vom Volumen des Zylinders um sie herum. Laut Plutarch wünschte er sich Kugel und Zylinder auf seinem Grab. Cicero berichtet, er habe das Grab 75 v. Chr. zugewachsen gefunden.

### 3 ÜBUNGEN

## AUFGABE 1



Berechne das Volumen der Kugel. Rechne mit  $\pi \approx 3,14$ .

a)  $r = 3$  cm      b)  $r = 10$  cm      c)  $d = 12$  cm

## AUFGABE 2



Prüfe die Herleitung mit Zahlen:  $r = 5$  cm, Schnitt in der Höhe  $h = 3$  cm. Berechne die Kreisfläche links und die Ringfläche rechts.

### AUFGABE 3



Eine Kugel ( $r = 6 \text{ cm}$ ) liegt in einem Zylinder ( $r = 6 \text{ cm}$ ,  $h = 12 \text{ cm}$ ). Berechne beide Volumen und das Verhältnis. Was hat Archimedes gefunden?

### LÖSUNGEN

**A1:** a)  $113,04 \text{ cm}^3$  b)  $\approx 4186,7 \text{ cm}^3$  c)  $r = 6 \text{ cm}$ :  $\approx 904,3 \text{ cm}^3$ .

**A2:** Kreis:  $\pi \cdot (25 - 9) = 16 \cdot \pi \approx 50,24 \text{ cm}^2$ . Ring:  $25 \cdot \pi - 9 \cdot \pi = 16 \cdot \pi$ . Gleich.

**A3:** Zylinder  $\approx 3,14 \cdot 36 \cdot 12 = 1356,48 \text{ cm}^3$ , Kugel  $\approx 904,32 \text{ cm}^3$ .  $904,32 : 1356,48 = 2 : 3$ .