

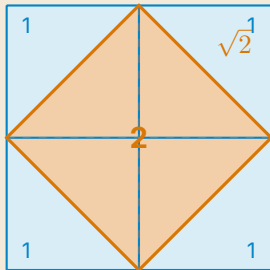
Die Wurzel aus 2

MATHEMATIK • POTENZEN • HANDOUT UND ÜBUNG

Ein Quadrat hat die Seite 1 m. Wie lang ist die **Diagonale** (die Linie von Ecke zu Ecke)? Das Video zeigt es.

1 DIE DIAGONALE IST $\sqrt{2}$

BEISPIEL



Vier Quadrate mit der Seite 1 bilden ein großes Quadrat mit der Fläche 4. Die vier Diagonalen bilden ein **schräges Quadrat**. Es besteht aus 4 halben Quadraten, also hat es die Fläche 2.

Seine Seite ist die Diagonale. Diagonale mal Diagonale = 2, also:

$$\text{Diagonale} = \sqrt{2} \approx 1,41 \text{ m}$$

2 WIE GROß IST $\sqrt{2}$?

BEISPIEL

$1,4^2 = 1,96$	zu klein
$1,41^2 = 1,9881$	zu klein
$1,414^2 = 1,999396$	zu klein, aber fast 2
$\left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{49}{25} = 1,96$	knapp unter 2
$\left(\frac{17}{12}\right)^2 = \frac{289}{144} \approx 2,007$	knapp über 2

Der Taschenrechner zeigt: $\sqrt{2} = 1,41421356 \dots$ Die Stellen hören nie auf.

3 DER BEWEIS: $\sqrt{2}$ IST KEIN BRUCH

BEISPIEL

- 1 **Annahme:** $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, der Bruch ist ganz gekürzt.
 - 2 Hoch 2: $\frac{p^2}{q^2} = 2$, also $p^2 = 2 \cdot q^2$.
 - 3 p^2 ist gerade. Also ist auch p gerade. (ungerade $\cdot$ ungerade = ungerade)
 - 4 $p = 2k$, also $p^2 = 4 \cdot k^2$.
 - 5 $4k^2 = 2q^2$, also $q^2 = 2k^2$. Also ist auch q gerade. (durch 2 geteilt)
 - 6 p und q sind gerade: Man kann mit 2 kürzen. **Widerspruch!**
- Der Bruch war schon ganz gekürzt. Also war die Annahme falsch: Es gibt keinen solchen Bruch.

RATIONALE UND IRRATIONALE ZAHLEN

Rational heißt: Man kann die Zahl als Bruch schreiben, z. B. $\frac{1}{2} = 0,5$, $5 = \frac{5}{1}$, $\frac{1}{3} = 0,333\dots$ (die 3 wiederholt sich).

Irrational heißt: Man kann die Zahl **nicht** als Bruch schreiben. Die Stellen hinter dem Komma hören nie auf und wiederholen sich nie, z. B. $\sqrt{2} = 1,41421356\dots$

Ist eine natürliche Zahl keine Quadratzahl, dann ist ihre Wurzel irrational: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, ...

4 EIN BLICK IN DIE GESCHICHTE

BEISPIEL

Babylon, etwa 1700 v. Chr.: Auf einer Tontafel (heute in den USA, Universität Yale) ist ein Quadrat mit seinen Diagonalen. Der Wert für $\sqrt{2}$ ist 1,414212... – die ersten fünf Stellen hinter dem Komma sind richtig.

Griechenland, etwa 500 v. Chr.: Pythagoras und seine Schüler, die Pythagoreer, glaubten: „Alles ist Zahl.“ Alles sollte in Verhältnisse von ganzen Zahlen passen. Der Pythagoreer **Hippasos** soll entdeckt haben: Seite und Diagonale passen in kein Verhältnis von ganzen Zahlen.

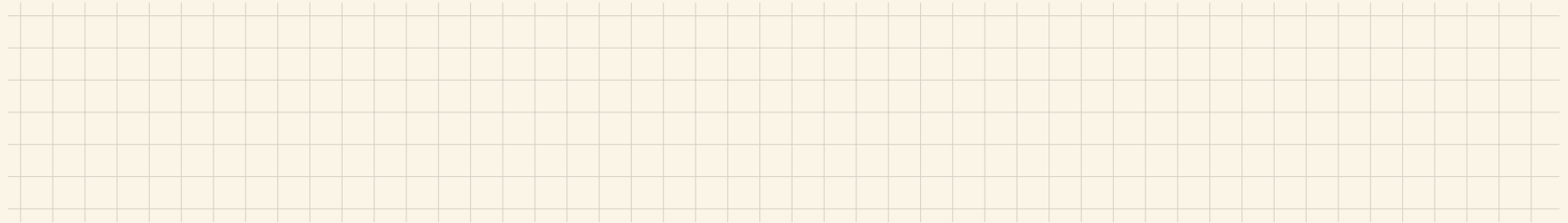
Eine Legende erzählt: Hippasos hat dieses Geheimnis verraten und ist später im Meer ertrunken – eine Strafe der Götter. Historiker halten diese Geschichte heute für wenig glaubhaft. Sicher ist: Die Entdeckung war eine große Leistung.

AUFGABE 3



Zeichne auf Karopapier ein Quadrat mit der Seite 4 cm und seine Diagonale.

a) Miss die Diagonale. b) Alle Längen sind 4-mal so lang wie beim Quadrat mit der Seite 1 cm. Also ist die Diagonale $4 \cdot \sqrt{2}$ cm lang. Rechne mit dem Taschenrechner und vergleiche.



AUFGABE 4



Lies den Text „Ein Blick in die Geschichte“ (Abschnitt 4). Beantworte die Fragen.

- Wann rechneten die Babylonier mit $\sqrt{2}$?
- Was glaubten die Pythagoreer?
- Was erzählt die Legende über Hippasos?
- Ist die Legende sicher wahr?

AUFGABE 5



Ergänze die Lücken im Beweis.

Annahme: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, ganz gekürzt. Dann ist $p^2 =$ _____.

Also ist p^2 _____ und auch p ist _____. Wir schreiben $p =$ _____.

Dann ist $p^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ und $q^2 = \underline{\hspace{2cm}}$. Also ist auch q .

Dann kann man den Bruch mit 2 _____. Das ist ein _____.

AUFGABE 6



Auch $\sqrt{3}$ ist irrational. Aber man kann gute Brüche finden.
Finde einen Bruch, dessen Quadrat zwischen 2,9 und 3,1 liegt.

Tipp ⚡ Probiere Brüche wie $\frac{5}{3}, \frac{4}{2}, \frac{7}{12}, \dots$

LÖSUNGEN

A1: a) $1,96 < 2$ b) $2,25 > 2$ c) $1,9881 < 2$ d) $2,0164 > 2$. Also liegt $\sqrt{2}$ zwischen 1,41 und 1,42.

A2: rational: a) 6, c) $\frac{3}{4}$, d), e) 10, g), h) 9. irrational: b) und f) (3 und 8 sind keine Quadratzahlen).

A3: a) etwa 5,7 cm b) $4 \cdot 1,414 \dots \approx 5,66$ cm

A4: a) vor etwa 3700 Jahren (um 1700 v. Chr.) b) „Alles ist Zahl“: Alles passt in Verhältnisse von ganzen Zahlen. c) Er hat das Geheimnis verraten und ist im Meer ertrunken. d) Nein, Historiker halten sie für wenig glaubhaft.

A5: $2q^2$; gerade; gerade; $2k$; $4k^2$; $2k^2$; gerade; kürzen; Widerspruch.

A6: z. B. $\left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16} = 3,0625$ oder $\left(\frac{12}{7}\right)^2 = \frac{144}{49} \approx 2,94$