

# Rechnen mit Wurzeln

MATHEMATIK • POTENZEN • HANDOUT UND ÜBUNG



Was passiert, wenn wir zwei Wurzeln mal nehmen? Und kann man eine Wurzel als Potenz schreiben? Das Video zeigt beides.

## 1 WURZELN MAL NEHMEN

### BEISPIEL

$$\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6 \quad \text{und} \quad \sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6$$

Warum?  $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = a \cdot b$  (4. Potenzgesetz). Also ist  $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$  die Zahl, die hoch 2 genau  $a \cdot b$  ergibt.

### WURZELN MAL NEHMEN

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \quad (\text{für } a, b \geq 0)$$

Wurzeln mal nehmen heißt: Radikanden mal nehmen. Genauso beim Teilen:  $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b}$  (für  $b > 0$ ).

### BEISPIEL

Zwei irrationale Zahlen:  $\sqrt{12} \cdot \sqrt{108} = \sqrt{4 \cdot 3 \cdot 36 \cdot 3} = \sqrt{4 \cdot 36 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{36} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 6 \cdot 3 = 36$

Wurzeln vereinfachen:  $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{108} = 6\sqrt{3}$ ,  $2\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} = 12 \cdot 3 = 36$

**TIPP** Achtung: Die Regel gilt beim **Malnehmen**, nicht beim Plus!  $\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$ , aber  $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$ .

## 2 DIE WURZEL ALS POTENZ

### BEISPIEL

Die Wurzel macht das Quadrieren rückgängig:  $(\sqrt{a})^2 = a = a^1$ .

Wir suchen  $x$  mit  $\sqrt{a} = a^x$ . Nach dem 3. Potenzgesetz ist  $(a^x)^2 = a^{2x}$ . Das muss  $a^1$  sein.

Also  $2x = 1$  und  $x = \frac{1}{2}$ . Bei der dritten Wurzel:  $\sqrt[3]{a} = a^x$ , also  $x = \frac{1}{3}$ .

### DIE WURZEL ALS POTENZ

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} \quad \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}} \quad \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

### BEISPIEL

$$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2 \quad 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2 \quad 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3 \quad 10\,000^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{10\,000} = 10$$

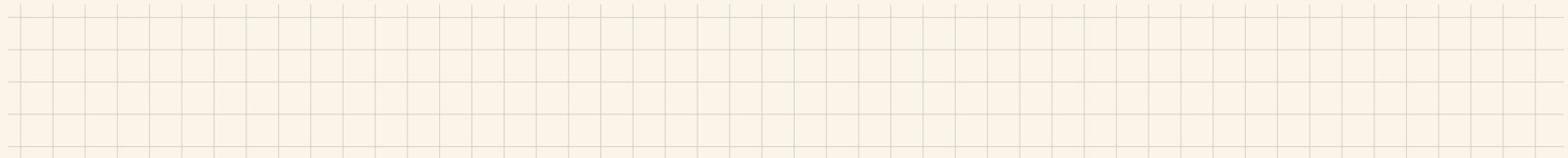
## 3 PÄCKCHENAUFGABEN

### AUFGABE 1



Berechne ohne Taschenrechner.

a)  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$    b)  $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$    c)  $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$    d)  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$    e)  $\sqrt{50} \cdot \sqrt{2}$    f)  $\sqrt{27} \cdot \sqrt{3}$



## AUFGABE 2



a) Schreibe als Potenz:  $\sqrt{7}$ ,  $\sqrt[3]{5}$ ,  $\sqrt[4]{10}$

b) Schreibe als Wurzel:  $3^{\frac{1}{2}}$ ,  $2^{\frac{1}{5}}$ ,  $x^{\frac{1}{4}}$

### AUFGABE 3



Vereinfache die Wurzel wie im Beispiel  $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ .

a)  $\sqrt{8}$    b)  $\sqrt{18}$    c)  $\sqrt{50}$    d)  $\sqrt{75}$    e)  $\sqrt{200}$

**TIPP** Suche im Radikanden eine Quadratzahl:  $8 = 4 \cdot 2$ .

## AUFGABE 4



Berechne ohne Taschenrechner.

a)  $25^{\frac{1}{2}}$     b)  $27^{\frac{1}{3}}$     c)  $16^{\frac{1}{4}}$     d)  $1000^{\frac{1}{3}}$     e)  $100^{\frac{1}{2}}$



a)  $\sqrt{9} + \sqrt{16} = \sqrt{25}$    b)  $\sqrt{4} \cdot \sqrt{25} = \sqrt{100}$    c)  $\sqrt{36 + 64} = 6 + 8$   
d)  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$    e)  $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3} = 6$    f)  $\sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{4}$



a)  $\sqrt{12} \cdot \sqrt{108} = 36$ : Zwei irrationale Zahlen ergeben eine ganze Zahl. Finde zwei weitere Beispiele.  
b) Erkläre mit dem 3. Potenzgesetz:  $8^{\frac{2}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 4$ .

**TIPP** Bei a) kannst du mit  $\sqrt{3} \cdot \sqrt{\dots}$  oder  $\sqrt{5} \cdot \sqrt{\dots}$  anfangen.

## LÖSUNGEN

---

**A1:** a)  $\sqrt{16} = 4$  b)  $\sqrt{36} = 6$  c)  $\sqrt{100} = 10$  d)  $\sqrt{36} = 6$  e)  $\sqrt{100} = 10$  f)  $\sqrt{81} = 9$

**A2:** a)  $7^{\frac{1}{2}}$ ,  $5^{\frac{1}{3}}$ ,  $10^{\frac{1}{4}}$  b)  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt[5]{2}$ ,  $\sqrt[4]{x}$

**A3:** a)  $2\sqrt{2}$  b)  $3\sqrt{2}$  c)  $5\sqrt{2}$  d)  $5\sqrt{3}$  e)  $10\sqrt{2}$

**A4:** a) 5 b) 3 c) 2 d) 10 e) 10

**A5:** a) falsch:  $3 + 4 = 7$ , aber  $\sqrt{25} = 5$  b) richtig:  $2 \cdot 5 = 10$  c) falsch:  $\sqrt{100} = 10$ , aber  $6 + 8 = 14$  d) richtig e) richtig:  $\sqrt{36} = 6$  f) falsch:  $2\sqrt{2} \approx 2,83$ , aber  $\sqrt{4} = 2$

**A6:** a) z. B.  $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27} = \sqrt{81} = 9$ ,  $\sqrt{5} \cdot \sqrt{45} = \sqrt{225} = 15$ ,  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32} = 8$  b)  $8^{\frac{1}{3}} = 2$  und  $2^2 = 4$ ; nach dem 3. Gesetz ist  $\left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 8^{\frac{1}{3} \cdot 2} = 8^{\frac{2}{3}}$ .