

# Das Heron-Verfahren

MATHEMATIK • WURZELN • HANDOUT UND ÜBUNG

$\sqrt{2} = 1,41421356 \dots$  ist irrational: Die Nachkommastellen hören nie auf. Mit dem **Heron-Verfahren** kannst du Wurzeln trotzdem sehr genau berechnen – nur mit Plus, Mal und Geteilt.

## 1 DIE IDEE: AUS EINEM RECHTECK WIRD EIN QUADRAT

### BEISPIEL

Wir suchen ein Quadrat mit dem Flächeninhalt 2. Seine Seite ist  $\sqrt{2}$ .

Start: ein Rechteck  $2 \cdot 1$ . Fläche 2, aber kein Quadrat.

**1. Schritt:** neue Seite =  $(2 + 1) : 2 = 1,5$ . Andere Seite =  $2 : 1,5 \approx 1,333$ .

**2. Schritt:** neue Seite =  $(1,5 + 1,333) : 2 \approx 1,4167$ . Andere Seite =  $2 : 1,4167 \approx 1,4118$ .

**3. Schritt:** neue Seite  $\approx 1,414216$  –  $\sqrt{2} = 1,414213 \dots$

Die Seiten werden immer gleicher. Das Rechteck wird ein Quadrat.

### HERON-VERFAHREN FÜR $\sqrt{a}$

Starte mit einer Zahl  $x$ , die ungefähr passt. Rechne dann immer wieder:

$$x_{\text{neu}} = \left( x + \frac{a}{x} \right) : 2$$

Das ist der **Mittelwert** von  $x$  und  $\frac{a}{x}$ . Mit jedem Schritt wird das Ergebnis genauer.

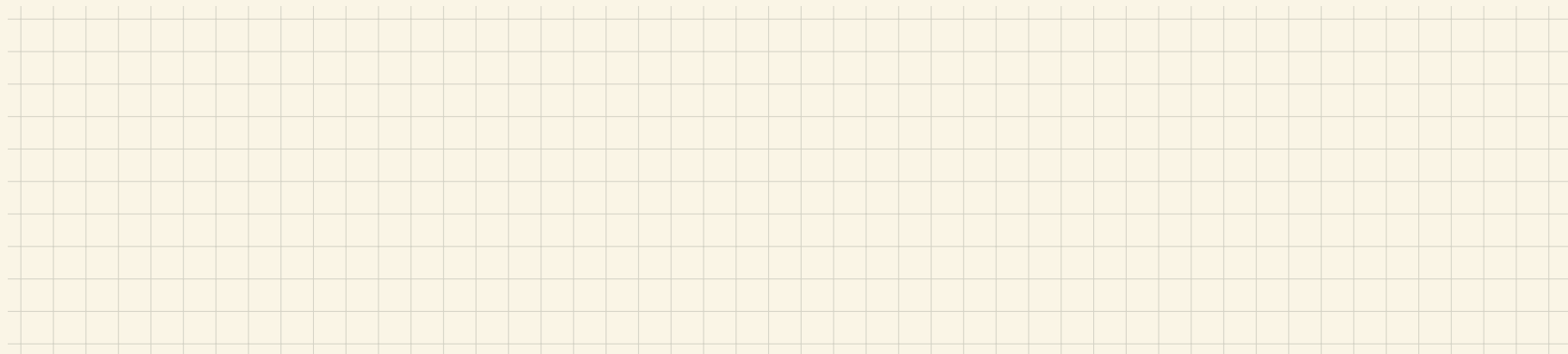
a)  $\sqrt{17}$     b)  $\sqrt{30}$     c)  $\sqrt{60}$     d)  $\sqrt{99}$     e)  $\sqrt{8}$



#### AUFGABE 4



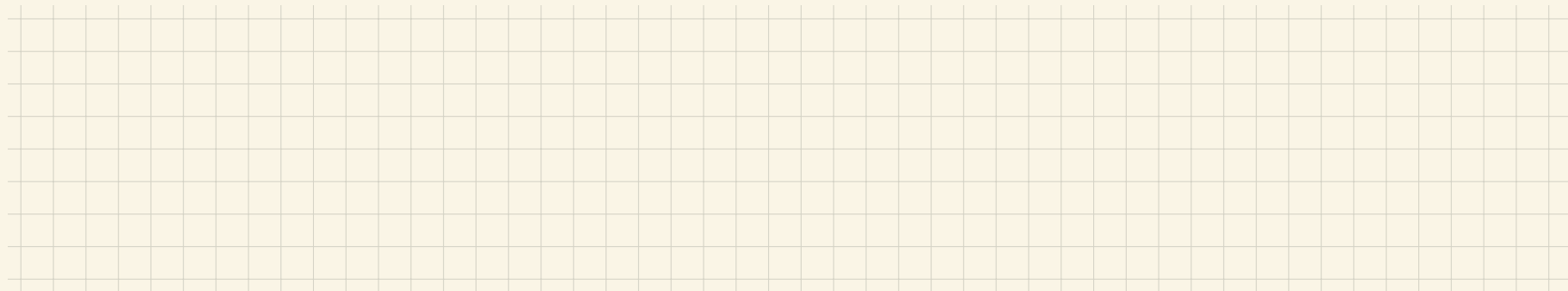
Zeichne die Rechtecke für  $\sqrt{5}$  mit Start  $5 \cdot 1$  (1 cm für 1). Mache zwei Schritte. Notiere jedes Mal beide Seitenlängen.



#### AUFGABE 5



Was passiert, wenn der Startwert genau richtig ist? Probiere  $\sqrt{49}$  mit  $x_0 = 7$ . Was passiert bei einem schlechten Startwert, z. B.  $\sqrt{49}$  mit  $x_0 = 1$ ? Mache drei Schritte.



**TIPP** Bei  $x_0 = 7$  ist  $\frac{7}{49} = 7$ . Der Mittelwert bleibt 7.

## LÖSUNGEN

---

**A1:** a)  $16 \Rightarrow 4$  b) 25 oder  $36 \Rightarrow 5$  oder 6 (beide sind gleich weit weg; 5,5 geht auch) c)  $64 \Rightarrow 8$  d)  $100 \Rightarrow 10$  e)  $9 \Rightarrow 3$

**A2:** a)  $(2 + 2,5) : 2 = 2,25$  ( $\sqrt{5} = 2,236\dots$ ) b)  $(4 + 4,25) : 2 = 4,125$  ( $\sqrt{17} = 4,1231\dots$ ) c)  $(2 + 1,5) : 2 = 1,75$  ( $\sqrt{3} = 1,732\dots$ ) d)  $(7 + 7,142857) : 2 \approx 7,0714$  ( $\sqrt{50} = 7,0711\dots$ )

**A3:**  $x_1 = (1 + 2) : 2 = 1,5$ ;  $x_2 \approx 1,4167$ ;  $x_3 \approx 1,414216$ . Zwei Nachkommastellen (1,41) stimmen ab  $x_2$ .

**A4:** Start  $5 \times 1$ . 1. Schritt:  $3 \times 1,667$ . 2. Schritt:  $2,333 \times 2,143$  (denn  $(3 + 1,667) : 2 \approx 2,333$  und  $5 : 2,333 \approx 2,143$ ).

**A5:**  $x_0 = 7$ : Es bleibt immer 7, das ist schon die Lösung.  $x_0 = 1$ :  $x_1 = 25$ ,  $x_2 = 13,48$ ,  $x_3 \approx 8,56$  – es dauert länger, kommt aber zu 7.